题：设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$

(1) 证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$

(II) 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$

证明：(1) 由积分中值定理知，存在 $\eta\in(0,2)$

$f(\eta)(2-0)=\int_0^2 f(x)dx$，则 $2f(0)=2f(\eta)$

即 $f(\eta)=f(0)$

(II) ∵ 由 (1) 知 $2f(\eta)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$

$f(\eta)=\dfrac{f(2)+f(3)}{2}$，令 $\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=w$

又∵ $f(x)$ 在 $[2,3]$ 连续，则 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上有最大值和最小值，设最大值为 M 最小值为 m

则 $m\leq w\leq M$，由介值定理知

存在一点 $c\in[2,3]$ 使 $f(c)=w$

由题设知 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,c]$ 上都连续且在 $(0,\eta)$ 和 (η,c) 内都可导，再加上以证得 $f(0)=f(\eta)=f(c)$，则 $f(x)$ 在 $[0,\eta]$ 及 $[\eta,c]$ 上都满足罗尔定理，则存在 $\xi_1\in(0,\eta)$

$\xi_2\in(\eta,c)$ 使 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$

又知 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理

则存在 $\xi\in[\xi_1,\xi_2]$ 使 $f''(\xi)=0$

证毕