题关键词：多元函数极限定义及应用定义证明极限，夹逼定理和极坐代换求多元函数极限。

题 1：证明下列极限

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=0$ （2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$ （3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

证明：（1）$0\le\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=\dfrac{2x^2|y|}{x^4+y^2}\bullet\dfrac{|y|^{\frac{1}{2}}}{2}\le\dfrac{x^4+y^2}{x^4+y^2}\bullet\dfrac{|y|^{\frac{1}{2}}}{2}=\dfrac{|y|^{\frac{1}{2}}}{2}\to 0$，$\{x^4-2x^2|y|+y^2=(x^2+y)^2\ge 0\}$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=0$。

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\left|\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\dfrac{(x^2+y^2)^2-2x^2y^2}{x^2+y^2}\right|=\left|(x^2+y^2)-xy\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|\le\left|x^2+y^2\right|+\left|xy\right|\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|$

$\le\left|x^2+y^2\right|+|xy|\le\left|x^2+y^2\right|+\dfrac{\left|x^2+y^2\right|}{2}=\dfrac{3}{2}\left|x^2+y^2\right|<\varepsilon$，取 $\delta=\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{3}}$，

则当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时总有 $\left|\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}-0\right|<\delta$ 成立，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2|y|^{\frac{3}{2}}}{x^4+y^2}=0$

（3）令 x=rcost, y=rsint, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|=\lim\limits_{r\to 0}\left|\dfrac{(r\cos t)(r\sin t)}{r^2}\right|=\lim\limits_{r\to 0}|r\sin t\cot t|=\lim\limits_{r\to 0}|\dfrac{r}{2}\sin 2t|$

$\le\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{r}{2}=0$，显然，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x\ y}{x^2+y^2}=0$